A Matemática e
as Ondas de Rádio AM



Frederico Ferreira de Pinho Tavares
Gilcélia Regiane de Souza

Atena
Editora
Ano 2021

A Matemática e **as Ondas de Rádio AM**



Frederico Ferreira de Pinho Tavares
Gilcélia Regiane de Souza

Atena Editora
Ano 2021

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes editoriais
Natalia Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os autores

Atena Editora
Ano 2021

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena
Editora
Ano 2021

A matemática e as ondas de rádio AM

Diagramação: Natália Sandrini de Azevedo
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Gabriel Motomu Teshima
Revisão: Os autores
Autores: Frederico Ferreira de Pinho Tavares
Gilcélia Regiane de Souza

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

T231 Tavares, Frederico Ferreira de Pinho
A matemática e as ondas de rádio AM / Frederico Ferreira de Pinho Tavares, Gilcélia Regiane de Souza – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5983-385-6
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.856210508

1. Matemática. 2. Ondas. 3. Trigonometria. 4. Rádio. 5. Modulação. 6. Demodulação. I. Tavares, Frederico Ferreira de Pinho. II. Souza, Gilcélia Regiane de. III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2021

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

Atena Editora
Ano 2021

DECLARAÇÃO DA EDITORA

Atena Editora
Ano 2021

APRESENTAÇÃO

Atualmente os educadores possuem duas tarefas desafiadoras no processo de ensino aprendizagem, que consiste na aplicação dos conteúdos dados no dia dia dos alunos e o envolvimento das ciências em ensinamentos vistos pelos estudantes nas escolas a multidisciplinaridade.

Neste livro mostramos o processo do envio da informação via ondas de rádio AM, expondo a aplicação de conteúdos Matemáticos em especial Funções Trigonométricas na Física, em Ondas Eletromagnéticas. Todo o material é composto por conteúdos do ensino básico, sendo de fácil acesso aos estudantes e educadores de escolas das duas áreas.

SUMÁRIO

RESUMO

O processo de envio de informações via onda de rádio está presente em nosso dia a dia de uma maneira tão forte que é difícil imaginar a possibilidade de retirá-lo de nossas vidas. Sendo assim, é interessante saber um pouco a respeito do seu funcionamento. Nosso objetivo é apresentar tal processo de um modo bem simplificado. Além disto, neste trabalho visamos uma interdisciplinaridade e uma abordagem mais próxima dos conteúdos vistos no ensino médio. A ideia é que ao mostrarmos uma aplicação prática da matemática em um contexto de suma importância do cotidiano seja possível despertar o interesse em aprender e tornar o processo de ensino aprendizagem mais prazeroso para os alunos. Escolhemos tratar a transmissão de informações via modulação e demodulação. A modulação, seja analogica ou digital, é basicamente o transporte de informação usando uma onda portadora, isto é, um sinal eletromagnético. O procedimento inverso, ou seja, obter novamente a informaçao é garantido pela demodulação. A demodulação é uma maneira de separar o sinal modulado, o sinal de interesse (informação) e o sinal da portadora.

PALAVRAS-CHAVE: Ondas, Trigonometria, Rádio, Modulação, Demodulação.

ABSTRACT

The process of sending information via radio wave is present in our daily life in such a strong way that it is difficult to imagine the possibility of withdrawing it from our lives. Therefore, it is interesting to know a little about its operation. Our goal is to present such a process in a very simplified way. Moreover, in this work we aim at an interdisciplinarity and a closer approach to the contents seen in high school. The idea is that when we show a practical application of mathematics in a context of paramount importance of everyday life it is possible to arouse interest in learning and make the learning process more enjoyable for students. We choose to treat information transmission via modulation and demodulation. Modulation, whether analog or digital, is basically the transport of information using a carrier wave, that is, an electromagnetic signal. The reverse procedure, that is, obtaining the infor- mation again is guaranteed by the demodulation. Demodulation is a way of separating the modulated signal, the signal of interest (information) and the carrier signal.

INTRODUÇÃO

O envio de informações via onda de rádio AM, é muito útil e serve de motivação para o estudo de alguns assuntos. Sendo assim a intenção deste trabalho é despertar um maior interesse dos alunos pelos conceitos matemáticos e físicos ao apresentar uma aplicaçao como a transmissão de dados via rádio AM. O objetivo também é mostrar a interação entre os conteúdos em um processo de suma importância no cotidiano.

O presente estudo tratará a modulação e a demodulação das ondas pelo processo DSB- SC (Double Sideband with Supressed Carrier), significa modulação em amplitude em banda lateral dupla com portadora suprimida, visando um entendimento geral do procedimento e a matemática envolvida, será bem básica, em específico conceitos trigonométicos.

Com a intenção de dispertar nos alunos do ensino médio um maior interesse em conceitos matemáticos e físicos envolvidos, o trabalho sugere uma sequência didática em que inicial- mente é apresentado um rádio aos alunos, os conceitos matemáticos e físicos, uma abordagem da modulação e demodulação AM no processo DSB-SC com a matemática envolvida no pro- cesso e por fim atividades sobre o contexto.

Este trabalho poderá ser utilizado em outros ramos além do ensino médio, quando o intuito for apresentar os conceitos necessários para a abordagem do conteúdo modulaçao e demodulação DSB-SC com um olhar mais básico e objetivo.

CONCEITOS BÁSICOS MATEMÁTICOS

Nesta seção são apresentados os conceitos básicos necessários para a compreensão do pro- cesso envolvido no envio de informação via onda de rádio AM.

2.1 Trigonometria

Trigonometria é um estudo feito em triângulos, tal que este proporciona relacionar lados e ângulos de um triângulo através de identidades denominadas seno, cosseno e tangente, podendo estas identidades ser expandida para um estudo de função denominado funções trigonométricas.

2.2 Ciclo Trigonométrico

Dado dois pontos *A* e *B* de uma cirncunferência esta fica divida em duas partes, sendo cada parte denominada arco da cinfunferência[1].

Dada uma circunferência de centro O com raio $r = 1$, em cima de um sistema de eixos ortogonais e tomando dois pontos quaisquer A e B, temos que a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é igual á medida do arco (AB) . Este sistema da circunferência de centro *O* de raio $r = 1$, inserida em um sistema de eixos ortogonais é dito ciclo trigonométrico, como mostra a Figura 2.

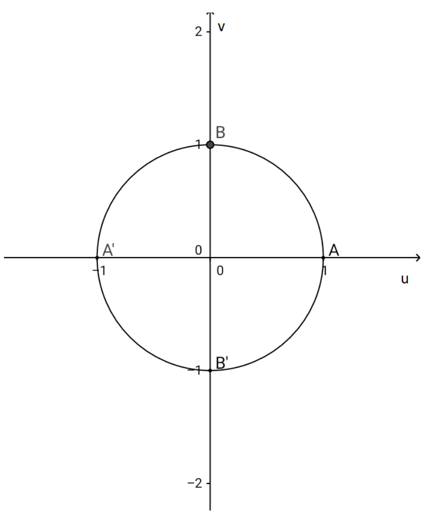


Figura 2: Circunferência de raio unitário nos eixos u0v.

Podemos associar no ciclo trigonométrico um ponto *P* da circunferência, no sentido horário e anti-horário partindo do ponto *A*. Assim o ponto *P* determinará dois arcos (AP), que são iguais ao ângulos $A\hat{O}P$ positivo se este é determinado no sentido anti-horário e o ângulo negativo $-A\hat{O}P$ que é igual ao ângulo positivo $360^0 - A\hat{O}P$. O ciclo trigonométrico é o instrumento usado para a determinação de seno, cosseno e

tangente de todos os arcos e ângulos. Assim podemos definir o ciclo trigonométricos devido as suas principais características:

1. Eixo dos Cossenos *u*; direção *AO*, sentido positivo de $O \rightarrow A$.

2. Eixo dos Senos *v*; direção *OB*, sentido positivo $O \rightarrow A$, sendo o arco $(AB) = \frac{\pi}{2}$.

3. Eixo das Tangentes reta vertical que passa pelo ponto *A*, o sentido é o mesmo do eixo do senos.

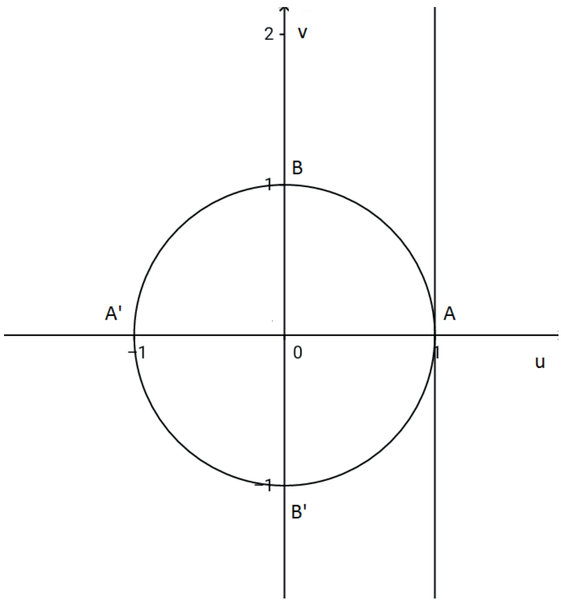


Figura 3: Ciclo trigonométrico com reta tangente no ponto (1, 0), o eixo (vertical) das tangentes.

Para determinar o seno de um ângulo dado por um ponto *P*, basta projetar o ponto *P* no eixo v obtendo OP_1, o seno do ângulo $A\hat{O}P$ é o comprimento OP_1, veja a Figura 4.

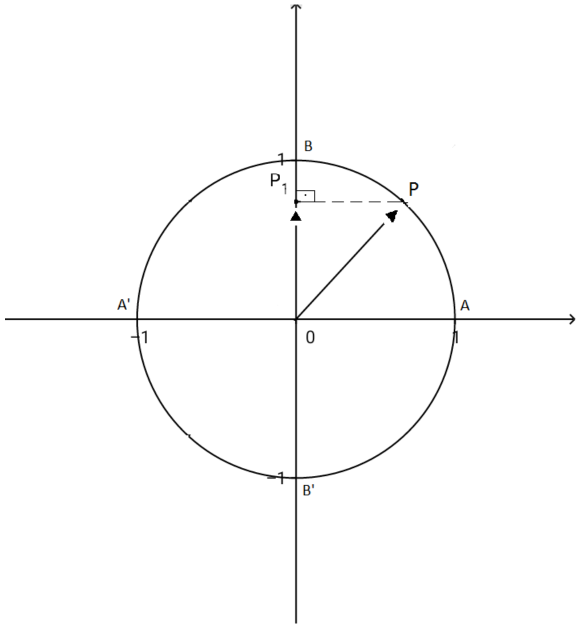


Figura 4: Projeção de OP sobre v, ou seja OP_1

determinar o cosseno de um ângulo dado por um ponto P , basta projetar o ponto P no eixo u obtendo OP_2, o seno do ângulo $A\hat{O}P$ é o comprimento OP_2, veja a Figura 5.

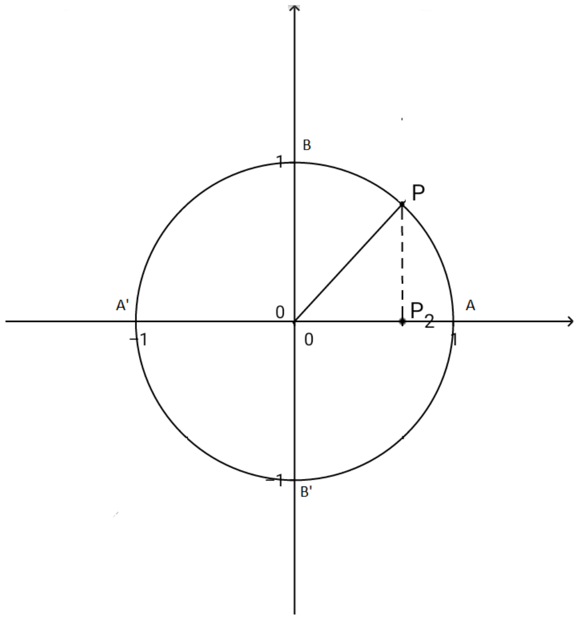


Figura 5: Projeção de OP sobre u, ou seja OP_2.

Assim podemos concluir que os valores de seno e cosseno de qualquer arco está compreendido de -1 a 1, devido ao fato do raio da circunferência ser *r = 1.*

2.3 Trigonometria no Triângulo Retângulo

A próxima seção dedica-se a uma breve revisão do estudo da trigonometria no triangulo retângulo.

Triângulo retângulo é um triângulo que possui um ângulo reto, isto é igual a 90^0. Podemos relacionar os lados e ângulos de um triângulo, através de três identidades denominadas seno, cosseno e tangente que serao demonstrado a seguir.

Considerando uma circunferência de raio unitário de centro em *B*, fixando-a em um sistema *u0v* e tomando os lados do triângulo de vértices *A, B* e *C* tais como *AB = c, AC = b, BC = a*, veja a Figura 6.

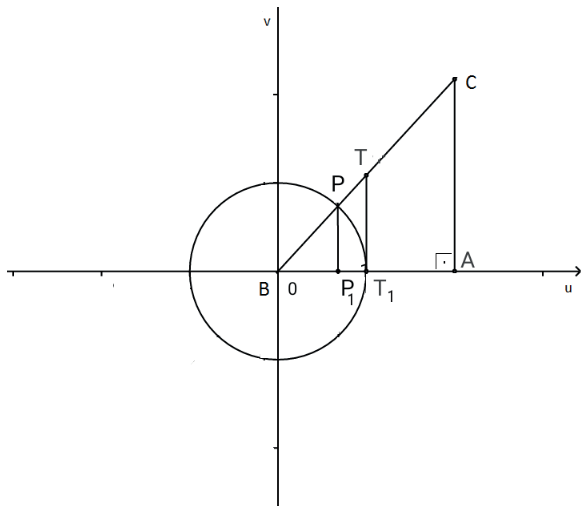


Figura 6: Triângulos ABC, BPP_1 (inscrito em um quarto de cincunferência), BTT_1 e cincunferência de O sobre o sistema de eixos ordenados .

Dá semelhança entre os triângulos BPP_1 e *BCA* temos:

$$\frac{P_1P}{BP} = \frac{AC}{BC}$$

Assim como mostrado anteriormente, sabemos que *BP = 1*, logo

$$\frac{P_1P}{1} = \frac{b}{a} \rightarrow P_1P = b/a$$

Esta identidade é denominada seno, sendo o quociente do cateto oposto com a

hipotenusa do triângulo retangulo. Denotado, por *sen(B) = b/a.*

Utilizando semelhança entre os triângulos BPP_1 e BCA temos:

$$\frac{BP_1}{BP} = \frac{BA}{BC}$$

Como feito anteriormente.

$$\frac{BP_1}{1} = \frac{c}{a} \rightarrow P_1B = c/a$$

Esta identidade é denotado por *cos(B) = c/a*, sendo o quociente do cateto adjacente com a hipotenusa do triângulo retângulo.

Utilizando semelhança entre os triângulos BTT_1 e BCA temos:

$$\frac{T_1T}{BT_1} = \frac{AC}{BA}$$

Usando os mesmos argumentos anteriores, temos que.

$$\frac{T_1T}{1} = \frac{b}{c} \rightarrow T_1T = b/c = sen(\theta)/\cos(\theta)$$

Esta identidade é denominada tangente, sendo o quociente entre o cateto oposto e o cateto adjacente do triângulo retangulo. Denotado por *tg (B) = b/c.*

2.4 Trigonometria em um Triângulo Qualquer

O estudo trigonométrico pode ser utilizado em qualquer tipo de triângulo, para isto, é necessário duas leis, a saber, a lei dos cossenos e a lei dos senos [1].

Teorema 2.1 (Lei dos cossenos) *Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos o duplo produto dessas medidas pelo cosseno do ângulo formado por eles, [1] isto é:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Demonstração: A demonstraçao será feitas em dois casos:

1ª) Triângulos Acutângulos

Seja um triângulo com Â < 90º, D o pé da alltura em relação ao vértice B, conforme a Figura 7.

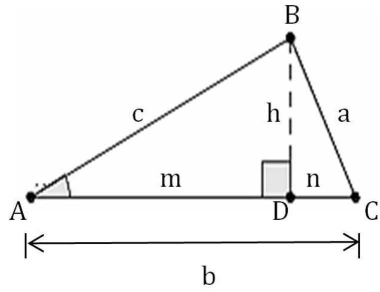


Figura 7: Triângulo retângulo *ABC* cuja altura é *BD*.

Pelo teorema de pitágoras temos:

$$a^2 = n^2 + h^2 \qquad \text{(I).}$$

$$c^2 = h^2 + m^2 \qquad \text{(II).}$$

Agora considerando o triângulo retângulo *ABC* tem-se claramente $n = b - m$ *(III)* Substituindo (III) e (II) em (I), obtemos:

$$a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2 = \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

Do triângulo *BAD* temos $m = c\cos(A)$, então:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}) \qquad \text{(lei dos cossenos)}$$

2ª) Triângulos Obtusângulos.

Seja ABC um triângulo com 90º < Â < 180º, veja a Figura 8.

Considere D o pé da perpendicular baixada de *P* , ou seja, a altura do triângulo *ABC* em relação ao vértice *B*. Do triângulo retângulo *BCD*, temos:

$$a^2 = n^2 + h^2 \qquad (I) \qquad \text{(Teorema de pitágoras)}$$

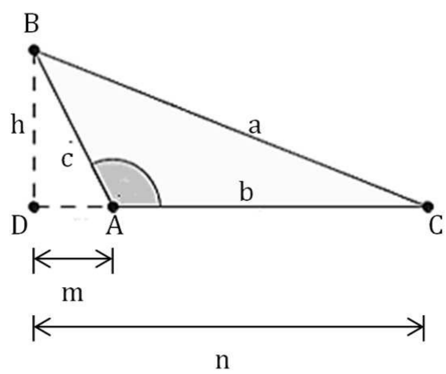


Figura 8: Triângulo obtusângulo de altura *BD*.

No triângulo *BAD*, que é retângulo, temos:

$$h^2 = c^2 - m^2 \qquad (II) \qquad \text{(Teorema de Pitágoras)}$$

Temos ainda:

$$n = b + m \qquad (III)$$

Substituindo (III) e (II) em (I), obtemos:

$$a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2 = \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$

Como no triângulo *BAD*, $m = c \cos(180^o - \hat{A})$, temos $m = -c \cos(\hat{A})$, logo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

Analogamente, podemos provar:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(B) \qquad 2.2 \text{ (lei dos cossenos)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C) \qquad 2.3 \text{ (lei dos cossenos)}$$

Teorema 2.2 (Lei dos Senos) *Em qualquer triângulo, o quociente entre a medida de cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo [1].*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\hat{C})}$$

Demonstração: Considere *ABC* um triângulo qualquer, inscrito em uma circunferência de raio *R*, veja a Figura 9.

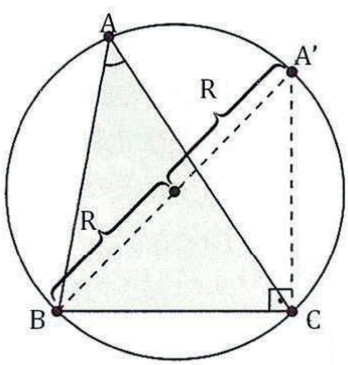


Figura 9: Triângulos acutângulo e o retângulo inscritos em uma circunferência de raio *R*.

Pelo vértice B, tracemos o diâmetro correspondente BA' e liguemos com *C*. Sabemos que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{A}'$ são congruentes por representarem a mesma corda *BC*. O triângulo *A'B'c* é retângulo em *C* por estar inscrito em uma semicircunferência de diâmetro BA'. Denotamos por *a, b* e *c* os segmentos *BC, AC* e *AB* utilizando trigonometria no triângulo retângulo temos:

$$a = 2R\ sen(A) \rightarrow 2R = \frac{a}{sen(A)}$$

Analogamente, fazendo todo o processo para os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, temos:

$$b = 2R\ sen(B) \rightarrow 2R = \frac{b}{sen(b)}$$

$$c = 2R\ sen(C) \rightarrow 2R = \frac{c}{sen(C)}$$

Assim podemos concluir que:

$$\frac{a}{\text{sen}\,(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}\,(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}\,(\hat{C})} \quad \text{(lei dos senos)}$$

2.5 Fórmula fundamental da trigonometria

Uma relação trigonométrica muito utilizada é a fórmula fundamental da trigonometria ou seja, para todo *x* real, vale a relação:

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

(Teorema fundamental da trigonometria)

Demonstração: Se $x \neq \frac{kx}{2}$, a imagem de x é distinta de *A, B, A' e B'*, logo sempre podemos definir um triângulo OP_2P retângulo, tal que sua hipotenusa é o raio da circunferência unitária, veja a Figura 10.

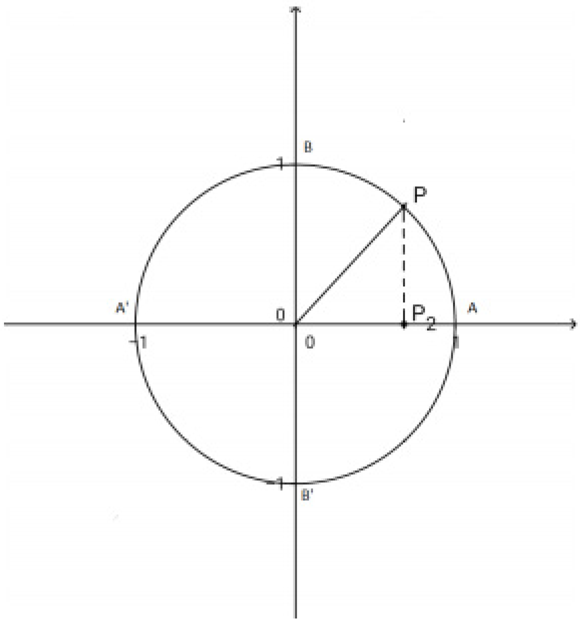


Figura 10: O ponto P sobre o círculo trigonométrico e triângulo retângulo OPP_2

Logo temos:

$$|OP_2|^2 + |PP_2|^2 = |OP|^2$$

Como $OP_2 = cos(x)$ e $PP_2 = \text{sen}\,(x)$, temos:

$$\text{sen}^2(x) + cos^2(x) = 1$$

2.6 Funções Periódicas

Uma classe muito importante de funções são as funções periódicas [1].

Uma função $f : A \rightarrow B$ será periódica se existir um número real $p \neq 0$, tal que quando estiver no domínio de f então $x + p$ estará também no domínio de f e o menor número real positivo p é chamado período de f.

$$f\,(x + p) = f\,(x) \quad \forall\, x \in A$$

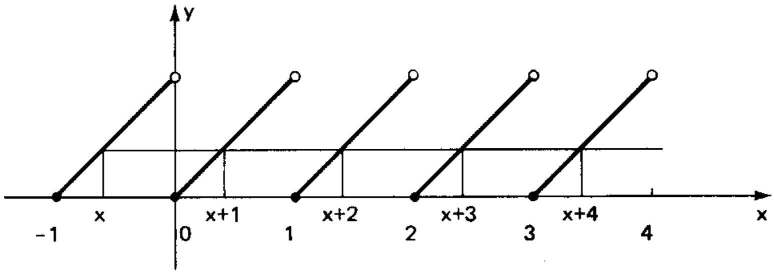


Figura 11: Exemplo função periódica.

O período *p* da função períodica, é o número real que define o comprimento em *x* em que a função repete seus ciclos periódicos indefinidamente. No exemplo da Figura 11 retirada da referência [1], temos o período $p = 1$ e nas funções seno e cosseno o período $p = 2\pi$.

Em específico trataremos neste trabalho das funções periódicas trigonométricas, que são as função seno, cosseno e tangente.

2.6.1 Função Seno

Função seno (senóide) é a função que associa cada real *x* a um ponto da circunferência, e consequentemente temos o segmento OP_1, como vimos $OP_1 = sen\ (x)$, assim:

$$f\ (x) = \text{sen}\ (x)$$

O gráfico da função seno, isto é f (x) = sen (x) pode ser visto na Figura 12.

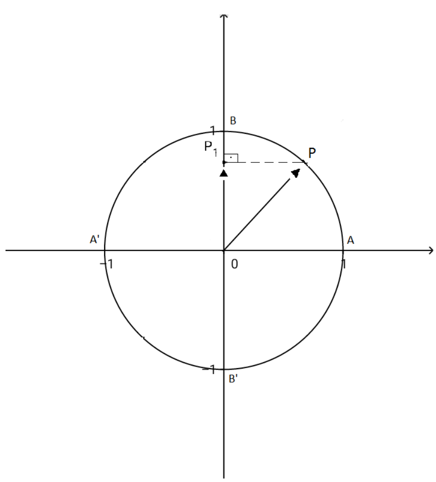


Figura 12: Ciclo trigonométrico denotando um ponto P_1 e a determinação de sua projeção em *v*.

A função seno possui várias propriedades, como:

1. Imagem pertence ao intervalo [-1,1].

2. Domínio de $f(x)$ é real.

3. A função $f\ (x)$ é periódica e seu período é 2π.

Tomando x tal que x percorra todo período 2π, temos:

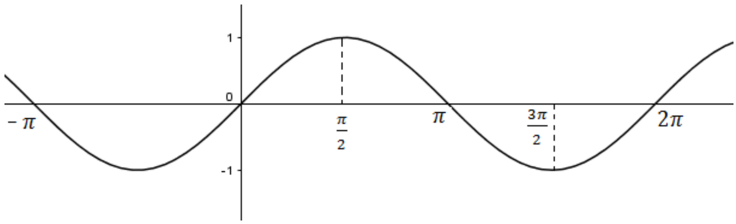


Figura 13: Gráfico função seno.

2.6.2 Função Cosseno

Função Cosseno (Cossenóide) é a função $f : R \rightarrow R$ que associa a cada real x o segmento $OP_2 = cos(x)$, isto é:

$$f\ (x) = cos(x)$$

As propriedades da função cosseno, são as mesmas da função seno e seu gráfico pode ser determinado da mesma forma.

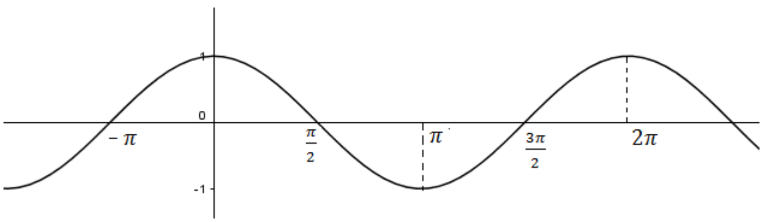


Figura 14: Gráfico função cosseno.

Funções seno e cosseno, relacionadas a ondas periódicas

Amplitude de uma onda senoidal (função seno ou cosseno), é um número real ω que de- termina a variação da função entre pico ou seu vale, isto é, um comprimento do intervalo da maior imagem da função ou menor imagem da função. Exemplo, $f\ (x)\ =\ sen\ (x)$ tem amplitude 1.

Frequência de uma onda senoidal, são quantos períodos a onda percorre em um

intervalo t definido, assim podemos definir diferentes frequências em uma mesma onda, tendo em vista que o intervalo t é arbitrário. Exemplo, $f(x) = sen(x)$ tem frequência $t/2\pi$.

Estas características das funções seno e cosseno, são importantes no ensio de ondas de rádio, pois os tipos de transmissão de rádio AM e FM se diferenciam de acordo com estas características. Ou seja, tem-se a modulação em amplitude ou frequência, como veremos na seção 4.

2.7 Adição e diferença de arcos

O seno, cosseno e tangente da soma de arcos é uma relação fundamental para a deter- minação das relações de ângulos não notáveis.

O seno da soma e diferença de dois arcos *a* e *b*, pode ser determinado por uma fórmula que utiliza apenas relaçoes trigonométricas de arcos *a* e *b* [1].

$$sen(a + b) = sen(a)\cos(b) + sen(b)\cos(a) \quad \text{(seno da soma dos arcos)}$$

$$sen(a - b) = sen(a)\cos(b) - sen(b)\cos(a) \quad \text{(seno da diferença dos arcos)}$$

O cosseno da soma e diferença de dois arcos *a* e *b*, pode ser determinado por uma fórmula que utiliza apenas relações trigonométricas de arcos *a* e *b*.

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - sen(a)\, sen(b) \quad \text{(cosseno da soma de arcos)}$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + sen(a)\, sen(b) \quad \text{(cosseno da diferença de arcos)}$$

A tangente da soma e diferença de dois arcos *a* e *b*, pode ser determinado por uma fórmula que utiliza apenas senos e cossenos de ambos isto é:

$$tg(a+b) = \frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)tg(b)} \text{ (Tangente da soma de arcos)}$$

$$tg(a+b) = \frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)tg(b)} \text{ (Tangente da soma de arcos)}$$

CONCEITOS BÁSICO FÍSICOS

Uma transmissao via onda de rádio AM envolve desde ondas sonoras, sendo a voz do locutor de uma rádio, a um aparelho denominado demodulador que recebe a informação a decodificar, podendo assim o ouvinte receber a mensagem a ser transmitida. Nesta seção são abordados os conteúdos físicos necessários neste processo.

3.1 Matéria e carga elétrica

Começando por um conceito bem simples, a saber, a matéria. *Matéria* é tudo que possui massa e ocupa um lugar no espaço. A ciência dos materiais é o estudo relativo as proprie- dades da matéria. Por sua vez, *átomos* são constituídos por particulas elementares, sendo as principais elétrons, prótons e nêutrons. A carga elétrica de cada um destes componentes é negativa, positiva e nula respectivamente [3].

A carga elétrica é dada pela unidade e, cujo o valor é $e = 1,6.10^{-19}C$. A letra *C* simboliza Coulomb uma unidade dada no sistema internacional de unidades, por definição sendo a carga elétrica transportada em um segundo por uma corrente de um ampére [3].

Um corpo pode ter carga elétrica positiva quando o seu número de prótons é maior que o número de elétrons, negativa quando o número de elétrons é maior que o número de prótons e neutra quando o número de prótons e elétrons é igual.

Os prótons, elétrons e nêutrons interagem-se de acordo com a Figura 15.

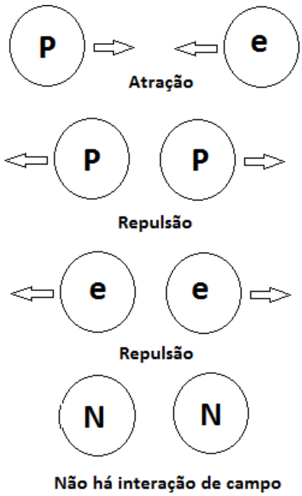


Figura 15: Interação entre prótons,elétrons e nêutrons.

3.2 Sinais elétricos

Sinais sao funções de uma ou mais variaveis independentes, que contém informações sobre fenômenos da natureza. *Sinais elétricos* são tensões elétricas ou diferença de potencial (quantidade de enérgia capaz de movimentar uma carga elétrica) que variam ao longo do tempo. Os sinais elétricos podem ser analogicos ou digitais.

Por sua vez Bit, isto é, abreviação de Binary digit (digito binário) em inglês, é a unidade de informação digital. Esta informação são combinações de códigos binários, logo combinação de números na base 2. E *Dados* são sequências de bits, que assim formam a informação [2].

I- *Sinal elétrico analógico* são tensões elétricas variantes no tempo, que são geradas por dis- positivos denominados transdutores. Assim os sinais elétricos da voz, isto é, músicas e áudios em geral são gerados através de um microfone que faz o papel de transdutor, para transformar a onda sonora em sinal elétrico [6].

II - *Sinal elétrico digital* são pulsos elétricos binários (bit), que são gerados por dispositivos eletrônicos em geral.

3.3 Sistema Internacional de Medidas

O sistema internacional de medidas (SI), foi criado no ano 1960 com o intuito de padronizar as unidades utilizadas e facilitar o uso e compreensão das mesmas. Existem sete grandezas base, do sistema internacional de medidas, a partir destas pode-se definir as demais grandezas denominadas grandezas derivadas.

Grandezas Base	unidade de medida
Tempo	segundo(s)
Massa	quilograma (Kg)
Comprimento	metro(m)
Temperatura	kelvin (K)
Quantidade de substância	mol
Corrente elétrica	ampére (A)
Intensidade Luminosa	candela (cd)

Tabela 1: Grandezas base

Grandezas Derivadas	Unidade de medida
Força	newton(N)
Velocidade	metros por segundo (m/s)
Volume	metro cúbico (m^3)
Frequência	Hertz (Hz)

Tabela 2: Grandezas derivadas

Além do sistema internacional de medidas é importante a especificação dos

prefixos de uma unidade, a fim de expor números relativamente grandes de forma mais simples, isto é, para quantificar o seu valor absoluto. A Tabela 3 apresenta os prefixos mais usados neste estudo:

Prefixo(símbolo)	Forma numeral
tera (T)	10^{12}
giga (G)	10^{9}
mega (M)	10^{6}
quilo (K)	10^{3}
micro (μ)	10^{-6}
nano (n)	10^{-9}

Tabela 3: Prefixos

3.4 Campo Elétrico e Campo Magnético

Campos são interações nas quais não ocorre contato físico. O campo gravitacional é associado à presença de um corpo com massa, o campo elétrico está relacionado à presença de cargas elétricas e o campo magnético se manifesta por causa da presença de polos magnéticos ou de cargas elétricas em movimento. Esses campos não são visíveis diretamente a olho nu. Eles podem ser percebidos por meio dos efeitos observados.

Campo elétrico é um campo vetorial, constituído por uma distribuição de vetores, um para cada ponto de uma região em torno do objeto eletricamente carregado. E é definido a partir de informações sobre seu módulo, sua direção e seu sentido. A direção (o sentido) do campo elétrico é a (o) mesma (o) do vetor força elétrica que atua numa carga de prova positiva.

O módulo mede a intensidade do campo, que diminui conforme aumenta a distância até a carga que o produz. A expressão do campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

No *SI*, a unidade de campo elétrico é o Newton/Coulomb (*N/C*), ou seja, é a força por unidade de carga.

Campo magnético é uma região ao redor de um ímã onde ele consegue atuar atraindo ou repelindo outros corpos. Tem-se também que cargas elétricas em movimento produzem campo magnético.

Assim, como o vetor campo elétrico $\vec{E}$ caracteriza a presença de um campo elétrico, a grandeza que expressa o campo magnético é denominada vetor indução magnética $\vec{B}$.

No SI, a unidade de indução magnética é o tesla (T). Propriedades desse vetor são:

Direção: tangente, em cada ponto do espaço, às linhas de campo magnético.

Sentido: o mesmo das linhas de campo.

Intensidade: depende do ímã ou da intensidade da corrente elétrica, da distância do ponto considerado ao fio e do meio que envolve o sistema.

3.5 Ondas

Ondulatória é a parte da física que estuda a propagação e oscilacão das ondas, estas são capazes de transportar energia em um meio material ou até mesmo no vácuo. A *onda* é um mecanismo de propagação de energia sem o transporte do meio material que a produz [4].

Existem dois tipos de ondas quanto a sua natureza física, que são as ondas mecânicas e as ondas eletromagnéticas que veremos a seguir.

I *Ondas mecânicas* são as ondas que necessitam de um meio material para a propagação de energia. Estas ondas geralmente são geradas por deformações no meio material. São exemplos de ondas mecânicas, ondas em cordas, ondas na água, ondas sonoras, etc.

II *Ondas eletromagnéticas* são ondas que transportam energia sem a necessidade de um meio material. São exemplos de ondas eletromagnéticas, ondas de rádio, raios X, luz visível, etc.

3.6 Ondas periódicas

As ondas periódicas possuem algumas características, que associada a uma função trigo- nométrica podem-se definir:

1. **Cristas**: são os pontos máximos da onda (imagem máxima da função).
2. **Vales**: são os pontos mínimos da onda (imagem mínima da função).
3. **Amplitude**: é o modulo de uma função em sua crista ou seu vale.
4. **Comprimento de onda**: é a distância entre dois vales ou duas cristas de uma onda trigonométrica. Denotaremos por λ.
5. **Oscilação**: é o comprimento de uma oscilação completa da onda.

Em uma função trigonométrica o período da função é o número real $p > 0$, tal que $f(x) = f(x + p)$, podemos associar o período da função trigonométrica com a oscilação fíısica.

6. **Período**: é o tempo necessário em qualquer ponto da corda, para ocorrer uma oscilação completa.

7. **Frequência**: é o número de oscilações em um determinado tempo.

Assim podemos relacionar através de uma expressão matemática o período e a frequência de uma onda. A unidade no (SI) de frequência é o *hertz*, que representa o número de oscilações por segundo. Considere f a frequência e T o período de uma onda, assim temos:

$$f = \frac{1}{T}$$

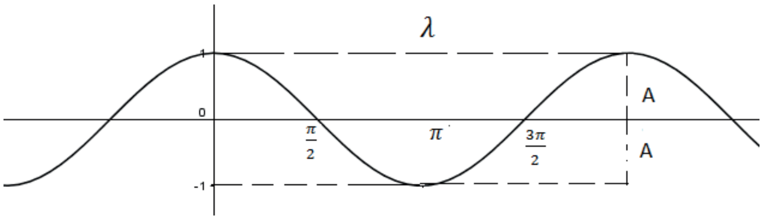


Figura 16: Onda periódica e suas características

Da expressão que define a velocidade escalar de um objeto temos:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot 1/t \qquad (1)$$

Considerando que $\frac{1}{T} = f$, teremos:

$$v = \lambda \cdot f \qquad (2)$$

Velocidade de propagação de uma onda periódica pode ser representada por uma expressão (2), que associa a velocidade a frequência e o seu comprimento de onda λ [3].

Para ilustrar e analisar as características de uma onda, consideramos o exemplo abaixo retirado de [9], onde podemos observar e fazer uma análise das características de onda.

Exemplo: A Figura 17, mostra uma onda transversal periódica, em dois instantes suces- sivos, propagando-se numa corda elástica:

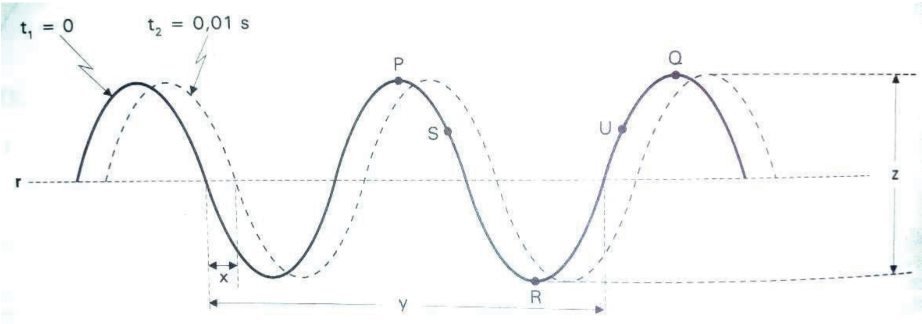


Figura 17: Onda periódica

r é a reta sobre a qual estaria a corda, se não houvesse onda.

$$x = 10cm \quad y = 150cm \quad z = 50cm$$

Suponha que o período dessa onda seja maior que o intervalo de t_1 a t_2.

a) Calcule sua amplitude.

b) Calcule sua velocidade de propagação.

c) Calcule seu comprimento de onda.

d) Calcule sua frequência.

Respostas:

a) $A = \frac{z}{2} = \frac{50cm}{2} \Longrightarrow A = 25$ cm.

b) De t_1 a t_2, a onda descola-se $x = 10$ cm para a direita.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{x}{\Delta t} = \frac{0{,}10m}{0{,}01s} \rightarrow v = 10\ m/s$$

c) A distância *y*, equivale a 1, 5 comprimento de onda

$$y = 1,5T \rightarrow 150 = 1,5T \rightarrow \lambda = 100cm = 1\ m$$

d) $v = \lambda f \rightarrow 10 = 1f \rightarrow f = 10$ Hz

3.7 Ondas sonoras

Ondas sonoras sao ondas mecânicas de frequência 20 a 20.000 Hz. Estas ondas possuem frequências compatíveis com a sensibilidade de captação do sistema auditivo humano. As ondas sonoras se propagam no ar e origina-se por meio de vibrações

no meio material.

Como a frequência da onda sonora varia entre 20 a 20.000 Hz, a frequência está relacionada com o número de vezes que o tímpano humano oscila, para captar o som e transmitir ao cérebro. Assim um som que possui frequência de 800 Hz, faz o tímpano humano executar 800 oscilações para captar a informação. Ondas superiores a 20.000 Hz e inferiores a 20 Hz, não são captadas pelo ouvido humano, mas alguns animais podem ouvir estes sons, tais como os cães que podem ouvir nas frequências de 15 Hz a 50 kHz e morcegos de 10 kHz a 120 kHz [3].

Como as ondas sonoras são ondas mecânicas, estas precisam de um meio para propagar-se, a velocidade da onda sonora varia em relação ao material que está se propagando.

3.8 Ondas eletromagnéticas

Onda eletromagnética é produzida pela oscilação simultânea de um campo elétrico e um campo magnético perpendiculares. As ondas eletromagnéticas, diferentemente das ondas mecânicas, podem propagar-se tanto no vácuo como nos meios materiais transparentes a ela

Meio	Velocidade do som (m/s)
Ar (20^{0}C)	343
Água	1.498
Água do mar	1.531
Aço	5.060
Alumínio	5.100

Tabela 4: Velocidade do som pelo meio material

[4]. No vácuo, todos as ondas eletromagnéticas viajam com a mesma velocidade c, não im- porta sua frequência. Porém, quando uma onda eletromagnética entra em um meio material, sua velocidade, que depende da frequência da onda, se altera de acordo com o índice de refração do meio.

A frequência ou o período de uma onda eletromagnética é o que define o tipo de onda na faixa do espectro eletromagnético, estamos interessados nas ondas de rádio, assim trataremos na próxima seção (Seçao 4) de ondas eletromagnéticas com frequência de 10^4 Hz a 10^7 Hz (faixa da frequência das ondas de rádio).

De acordo com a lei de Faraday, a variacão de um campo magnético ocasiona o surgimento de um campo elétrico. Esse campo elétrico induzido também é variável e, de acordo com a hipótese de Maxwell, gera um campo magnético induzido. Por sua vez, esse campo magnético induzido também é variavel e irá causar um campo elétrico

induzido, e assim sucessivamente. Portanto, os campos magnéticos e elétrico são interdependentes e se propagem em todas as direções.

Ao aplicar em suas equações perturbações dessa natureza, Maxwell percebeu que elas in- corporavam um caráter ondulatório, transportavam energia e estavam sujeitas aos fenômenos de reflexão, difração e interferência, como quaisquer ondas conhecidas. Por esse motivo, essas perturbações foram denomindadas *ondas eletromagnéticas.*

A representação de uma onda eletromagnética ilustra que o campo magnético e o campo elétrico são perpendiculares entre si e que ambos são perpendiculares à direção de propagação.

Notamos que a direção da propagação da onda eletromagnética, é dado por C da Figura 18,

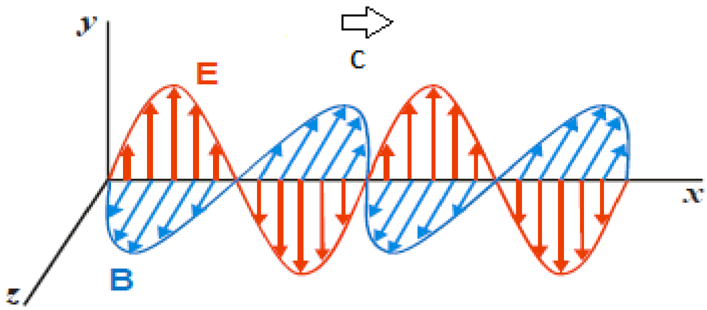


Figura 18: Representação de uma onda eletromgnética.

sendo direção do eixo das abcissas.

3.8.1 Velocidade da onda eletromagnética

A velocidade de uma onda eletromagnética depende do meio material que será transportada, além de sua frequência. A onda eletromagnética terá uma velocidade máxima no vácuo, diminuindo sua velocidade de acordo com o meio de propagação, por exemplo, no ar a velocidade é de 299.890 (Km/s) e na água 226.000 (Km/s) [9]. No vácuo essa velocidade de propagaçao é de $3 \cdot 10^8$m/s, independentemente da sua frequência.

3.8.2 Espectro de radiação eletromagnética

Existem vários tipos de ondas eletromagnéticas, por exemplo, ondas de rádio, micro-ondas, infravermelho, raios ultravioleta, raios-x, raios Gama. As ondas eletromagnéticas variam de ondas de rádio, que são ondas eletromagnéticas de baixa fequência, a ondas de raios gama, que são as ondas eletromagnéticas de alta frequência.

Radiação é um processo de propagação de energia de um ponto a outro, sendo o meio de propagação vácuo ou material. Os diferentes tipos de ondas eletromagnéticas diferem-se devido a sua frequência, comprimento de onda e energia transportada, podemos observar na Tabela 5 retirada da [10].

Podemos relacionar o comprimento de onda dos diferentes tipos de ondas eletromagnéticas, com elementos que estão presentes no dia a dia, veja a Figura 19 retirada da [10].

Região	Comprimento de Onda (centímetros)	Frequência	Energia
Radio	> 10	$< 3 \cdot 10^9$	$< 10^{-5}$
Micro-ondas	$10 - 0,01$	$3 \times 10^9 - 3 \times 10^{12}$	$10^{-5} - 0,01$
Infra-vermelho	$0,01 - 7 \times 10^{-5}$	$3 \times 10^{12} - 4,3 \times 10^{14}$	$0,01 - 2$
Visível	$7 \times 10^{-5} - 4 \times 10^{-5}$	$4,3 \times 10^{14} - 7,5 \times 10^{14}$	$2 - 3$
Ultravioleta	$4 \times 10^{-5} - 10^{-7}$	$7,5 \times 10^{14} - 3 \times 10^{17}$	$3 - 10^3$
Raios-X	$10^{-7} - 10^{-9}$	$3 \times 10^{17} - 3 \times 10^{19}$	$10^3 - 10^5$
Raios Gama	$< 10^{-9}$	$> 3 \times 10^{19}$	$> 10^5$

Tabela 5: Espectro de Radiação Eletromagnético

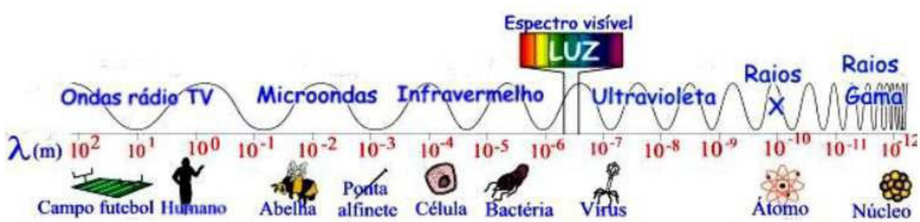


Figura 19: Espectro eletromagnético por comprimento de onda.

3.9 Ondas de Rádio

Uma *onda de rádio* é uma onda eletromagnética propagada por uma antena com sinal de frequência de 10^4 Hz a 10^9 Hz. Pelo espectro magnético podemos facilmente perceber que, as ondas de rádio são as ondas que possuem maior comprimento de onda entre todos os tipos de ondas eletromagnéticas. As ondas de rádio são muito usadas nos meios de comunicação, sendo responsável por toda informação trasnmitida por TV, rádio, celulares, dentre outros dispositivos [2].

3.9.1 Rádio AM e FM

As rádios FM transmitem em um sinal de frequência entre 88 a 108 megahertz (milhões de ciclos por segundo), isto é entre 88.000.000 a 108.000.000 ciclos de ondas por segundo.

As rádios AM transmitem um sinal de frequência que vai de 535 a 1700 kilohertz (milhares de ciclos por segundo), isto é entre 535.000 a 1.700.000 ciclos por segundo. Assim podemos definir que as ondas FM sao de alta frequência e ondas AM são de baixa frequência [11].

As bandas de frequ¨ência mais comuns são:

1. rádio AM: 535 kilohertz a 1.7 megahertz
2. rádio de ondas curtas : 5.9 megahertz a 26.1 megahertz
3. rádio CB: 26.96 megahertz a 27.41 megahertz.
4. canais de TV: 54 a 88 megahertz do canal 2 até o 6.
5. rádio FM: 88 megahertz a 108 megahertz.
6. canais de TV: 174 a 220 megahertz do canal 7 até o 13.

3.9.2 Aplicações ondas de rádio

As ondas de radio são responsáveis pela maior transmissão de informação atualmente, assim sendo imprescindíveis para o desenvolvimento humano e estão presentes no dia a dia de cada pessoa. Existem várias aplicações das ondas de rádio em nosso cotidiano e algumas delas são apresentados com suas frequências abaixo [11]:

1. telefones sem fios: 40 a 50 megahertz.
2. babá eletrônica: 49 megahertz.
3. carros de controle remoto: 75 megahertz.
4. controle remoto em torno de 40 megahertz.
5. colares para localização de animais : 215 a 220 megahertz.
6. telefones celulares: 824 a 849 megahertz. novos telefones sem fios de 900 MHz: em torno de 900 megahertz.

A MATEMÁTICA POR TRÁS DA TRANSMISSÃO E RECEPÇÃO DE INFORMAÇÃO

A transmissao de uma informação por onda de rádio é feita da propagação das ondas senoidais por um par de antenas, sendo uma antena responsável pela propagação da onda via emissora e outra antena no aparelho de rádio que receptará a informação.

As ondas eletromagnéticas (ondas senoidais) possuem três características importante, amplitude, frequência e período. Para uma melhor compreensão, é necessário a compreensão do funcionamento do rádio.

O deslocamento de informações de baixa frequência para altas frequências é conhecido como comunicação por portadora. Pode-se fazer o deslocamento do sinal sem perda ou interferência da mensagem usando Transformada de Fourier. As deduções de modulação e demodulação por amplitude através da Transformada de Fourier podem ser vistas em [6].

Neste trabalho visamos uma interdisciplinaridade e uma abordagem mais próxima dos conteúdos vistos no ensino médio. Sendo assim, a proposta de modulação e demodulação utiliza gráficos de funções e relações entre grandezas, do tipo seno e cosseno tornando o processo mais simples, ou seja, no nível de compreensão dos estudantes do ensino médio.

4.1 Ondas de rádio AM e FM

Duas maneiras de transmitir ondas de rádio são a amplitude modulada (AM) e a frequência modulada (FM): há uma onda eletromagnética que transporta a informação, denominada onda portadora, e que está relacionada à frequência de transmissão. Isso significa que quando uma emissora de rádio FM, por exemplo, tem frequência de 100 MHZ, a *onda portadora* é gerada e transmitida com essa frequência. Para que as informações fiquem contidas na onda portadora, recorre-se aos processos de modulação de amplitude e de frequência, e obtêm-se as ondas de rádio AM e as ondas de rádio FM. Na modulação em amplitude, ocorre uma variação da amplitude da onda senoidal ao longo do tempo, transformando a onda periódica em uma onda que possui uma oscilação no seus picos e vales.

Amplitude modulada (AM)

Na transmissão de amplitude modulada, as perturbações geradas pela onda sonora original são convertidas em variações de amplitude que irão se reproduzir na amplitude da onda portadora, Figura 20.



Figura 20: O gráfico da esquerda mostra uma corrente gerada pela estação trasmissora com frequência igual à da onda portadora. O gráfico cental mostra uma corrente de baixa frequência, gerada do som captado pelo microfone. O gráfico da direita mostra a corrente com amplitude modulada, que será conduzida à antena transmissora para gerar uma onda eletromagnética de rádio. O bordo da última figura tem as mesmas características da onda gerada pelo som.

Frequência modulada (FM)

Na transmissao de frequência modulada, as informações contidas na onda sonora original são convertidas em variações de frequência da onda portadora, Figura 21.



Figura 21: O gráfico da esquerda mostra uma corrente gerada pela estação trasmissora com frequência igual à da onda portadora. O gráfico cental mostra uma corrente de baixa frequência, gerada do som captado pelo microfone. O gráfico da direita mostra a corrente com frequência modulada, que será conduzida à antena transmissora para gerar uma onda eletromagnética de rádio. A frequência da onda portadora tem algumas características da onda gerada pelo som.

Como a transmissão de uma rádio FM ocorre na faixa 100 MHz, enquanto a faixa de transmissão de uma rádio AM é da ordem 1 000 kHz, em uma transmissão FM chegam à antena mais informações por segundo que em uma transmissão AM.

4.2 Funcionamento do rádio e transmissão

O processo de transmissão de informação via onda de rádio, consiste em um sistema de transmissão e recepção de mensagem em uma frequência específica. A estrutura deste sis- tema possui duas peças principais, a saber: transmissor (transmite a informação) e receptor (recepta a informação).

Assim temos que o transmissor transmite uma informação (áudio, vídeo, dados) e o re- ceptor decodifica está informação para emitir no aparelho, através de um par de antenas.

Transmissor possui a informação que pode ser um som, uma imagem ou um dado. A função deste aparelho é transformar esta informação em um onda eletromagnética, com uma frequência específica e enviar a onda no espaço livre. O receptor recebe esta informaçao, onda de rádio, a decodifica de acordo com frequência que a informação foi transmitida, exibindo assim o conteúdo da informação desejado na transmissão [2].

Observe o esquema da Figura 22, onde são mostradas as etapas de uma transmissão de rádio.

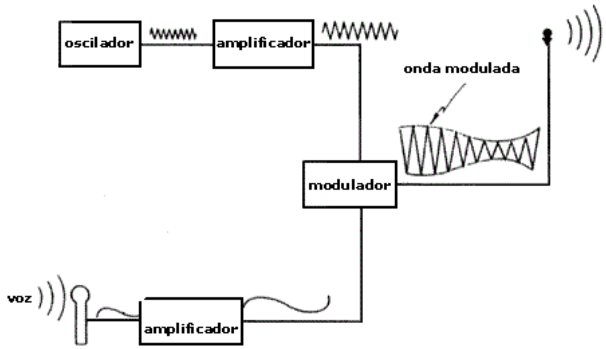


Figura 22: Circuito por etapas da transmissão da informação AM.

O funcionamento do rádio é bem simples, vamos mostrar um transmissão da emissora de rádio, chamada Rádio TK.

I Na emissora de Rádio TK o locutor fornece as informações utilizando um microfone. O microfone é um aparelho transdutor, isto é, recebe a informação através de variações na pressão acústica da onda sonora (onda mecânica) e a transforma em sinal elétrico.

II O sinal elétrico portador da informação, é enviado através de fios para um aparelho denominado amplificador, o mesmo tem a função de transformar a onda senoidal (sinal elétrico) que possui um nível de pequeno sinal, isto é, na escala de milivolts ou microvolts para um sinal mais alto, transformando o sinal elétrico em corrente elétrica via circuitos integrados.

III Na Rádio TK há um aparelho denominado oscilador, que tem a função de gerar apenas a frequência específica da rádio, por exemplo, se a Radio TK é recebida pelo ouvintes na estação 95.1 MHz este oscilador vai gerar apenas as ondas específicas para chegar ao ouvinte a informação na sintônia 95.1 MHz. Assim, cada emissora terá um tipo de frequência de onda, distinta, gerada por osciladores, consequentemente as sintonias destas diferentes emissoras serão distintas. Logo o oscilador vai gerar uma onda se- noidal, que será também ampliada por um outro amplificador e também levada para o modulador.

IV Este sinal contendo a mensagem, mesmo depois de amplificado não é eficaz para o pro- cesso da transmissão da informação no espaço livre, pois devido a sua baixa frequência (grande comprimento de onda) interfere no tamanho da antena para recepção, tendo em vista que uma antena deve ter no mínimo metade do comprimento de onda para a recepção eficiente da informação. Outro fator importante para se fazer o processo de modulação do sinal da mensagem, é que devido a voz das pessoas possuírem a mesma faixa de frequência (onda sonora

de 20 a 20.000 Hz), todas as informações que seriam transmitidas no espaco livre seriam frequências muito próximas causando interferência na recepção.

Logo se faz necessário um aparelho denominado modulador (mixer), que é utilizado para mixar os sinais que vêm dos amplicadores. Matematicamente ele é representado pela multiplicação dos sinais no tempo no caso da modulação em amplitude (rádio AM), tendo a função de juntar as duas ondas que vêm do microfone e do oscilador. Pela interação ou modulação das ondas é gerada uma onda denominada onda modulada, que é capaz de transmitir a informação no espaço livre (ar). Portanto, o modulador tem a função de modular as ondas para envia-las até antena na forma de uma onda modulada, transmitindo as informações para os distintos aparelhos. Os principais tipos de modulação são por frequência (rádio FM) e por amplitude (rádio AM). Deteremos nossa atenção no segundo caso.

Veja as diferentes formas de modulação na Figura 23, retirada da referência [12].

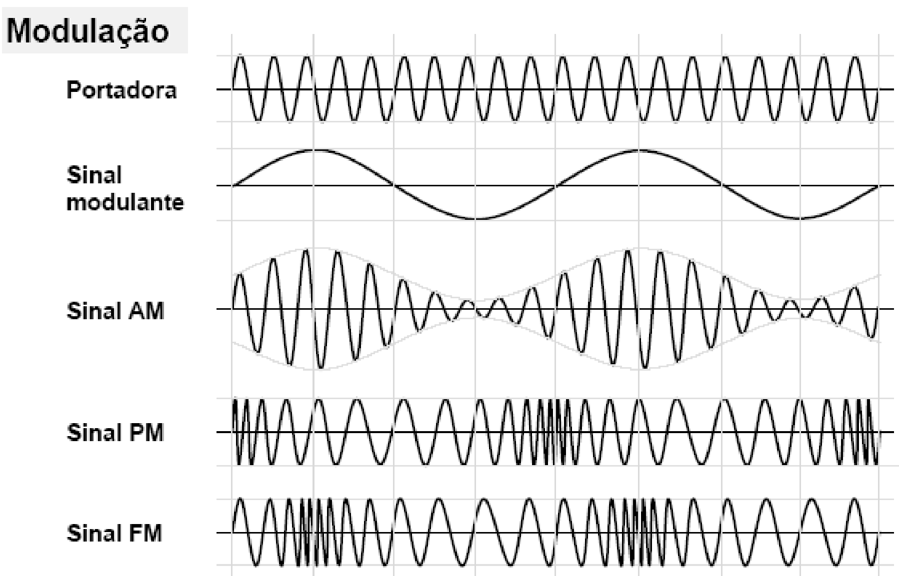


Figura 23: Modulações por amplitude, frequênca e fase.

V A onda eletromagnética é transmitida no ar, os aparelhos que fazem a recepção possuem um equipamento denominado receptor que terá a função de receber esta informação e transmiti-la no aparelho de voz. O receptor possui um equipamento denominado sin- tonizador, o aparelho receberá milhares de ondas, a função do sintonizador é ampli- ficar uma onda específica e ignorar todas as outras ondas frequências presentes no ar (princípio de ressonância) [2]. Logo a partir deste processo é possível depois da onda já captada pelo aparelho de rádio (através de um demodulador), demodular a onda modulada e assim

transmitir a informação de voz por um auto falante de aparelho de rádio ou até um fone de ouvido [5].

4.3 A modulação em amplitude DSB-SC

A sigla DSB-SC (Double Sideband with Supressed Carrier), significa modulação em am- plitude em banda lateral dupla com portadora suprimida – detalhes serão apresentados ao longo deste seção. As figuras desta e da próxima seçcão foram retiradas da referência [7], e possuem um caráter de onda pura.

O processo geral de incorporar um sinal que contém a informação em um outro sinal é ti- picamente chamado de *modulação*. A onda de rádio que não possui informação é denominada *onda portadora,* assim no processo de modulação é inserido a informação presente na onda da mensagem (onda modulante) a onda portadora. A onda da mensagem como citada ante- riormente contém a informação a ser transmitida, mas a sua transmissão é ineficaz no envio do sinal ao espaço livre. Assim, com o processo de modulação a nova onda eletromagnética agora como onda modulada é capaz de enviar a informação no espaço livre, ou seja, do apa- relho transmissor ao aparelho receptor. Podemos observar a posição da mensagem, Figura 24, no gráfico do sinal da onda, dado por sua frequência e amplitude. A frequência do sinal da mensagem é dada por ω_M .

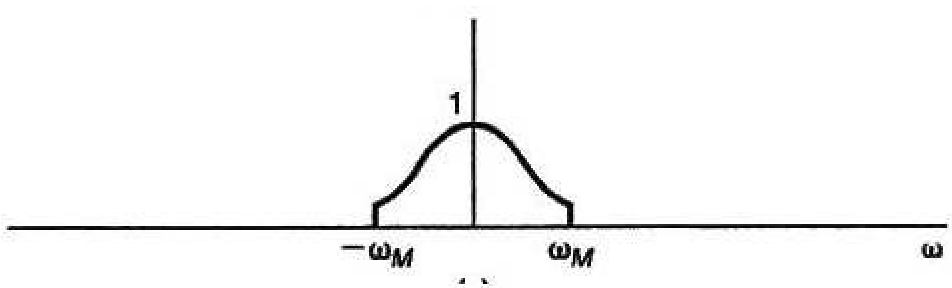


Figura 24: Onda da mensagem sobre o efeito no domínio de sua frequência.

Notamos a posição do sinal da mensagem, que possui amplitude 1, com variação de frequência ω_M . Através dos princípios da modulação em amplitude [6], é possível deslocar o sinal da mensagem para a frequência da portadora ω_c, centrando a informação da mensagem exatamente na frequência da portadora. Devido ao fato da frequência ser o número de oscilações em um determinado tempo, assim os gráficos expostos e equações que seram abordadas no texto, apresentam a relação entre a frequência e a amplitude a caráter de uma onda pura.

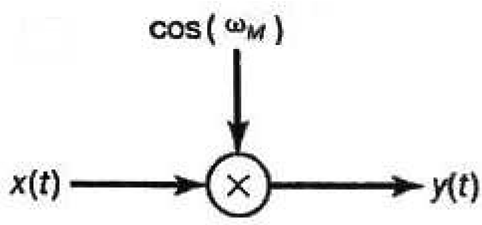


Figura 25: Esquema modulação AM.

No esquema da modulação, Figura 25, a função *x(t)* representa o sinal da portadora e $cos(\omega_M)$, representa o sinal da onda da mensagem. Tomando a frequência do sinal da portadora por ω_c, para não ocorrer uma sobreposição das ondas do sinal modulado, devemos assumir que $\omega_M < \omega_c$. Podemos observar na Figura 26, os gráficos dos sinais da mensagem, da frequência da portadora e seus respetivos argumentos ω_M e ω_c.

Da Figura 26, vemos a posição do sinal da mensagem em sua frequência ω_M , o sinal da mensagem necessita de uma ampliação na sua frequência em direção a frequência da portadora, para que a informaçao seja transmitida na frequência da portadora.

Assumindo uma abordagem no domínio do tempo, considere a modulação de um sinal (mensagem de interesse) - onda modulante - dado pela função m(t), por uma onda portadora de função *x(t)*. A frequência do sinal da mensagem é dada por ω_M . A modulação consiste em multiplicar as referidas funções, assim podemos assumir que o sinal modulado *y(t)* será dado por:

$$y(t) = m(t) \cdot x(t)$$

A portadora pode ser representada por uma função cossenoidal, logo podemos reescrever o sinal modulado como

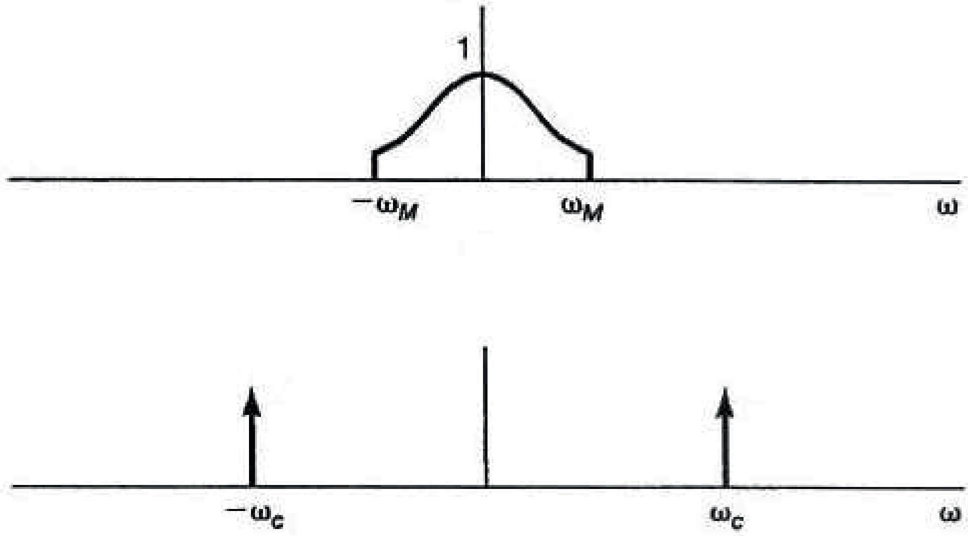


Figura 26: Sinal modulante e frequência da portadora.

$$y(t) = \cos(\omega_M) \cdot \cos(\omega_c) \qquad (3)$$

Note que usando identidades trigonométricas, tem-se:

$$cos(a + b) + cos(a - b) = cos(a)\, cos(b) - sen\,(a)\, sen\,(b) + cos(a)\, cos(b) + sen\,(a)\, sen\,(b)$$

ou seja,

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

Logo,

$$coss(a) = \frac{1}{2}\cos(a+b) - \frac{1}{2}\cos(a-b) \qquad (4)$$

Assim, podemos reescrever a equação da onda modulada (3), ou seja,

$$y(t) = \frac{1}{2}[\,cos(w_c + w_m) + \cos(w_c - w_m)]$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\,cos(w_c + w_m) + \frac{1}{2}\cos(w_c - w_m)$$

E o sinal modulado passa a ter duas componentes (modulação em banda lateral dupla). As duas componentes *½ cos*($\omega_c + \omega_M$) e *½ cos*($\omega_c - \omega_M$) presentes no sinal modulado, são denominadas bandas laterais. Podemos observar na Figura 27, o

grafico da frequência do sinal por sua amplitude, a posição da mensagem após o processo de modulação centrados na frequência da onda portadora. Assim o sinal da mensagem, agora na frequência da portadora, poderá ser transmitido nesta nova frequência.

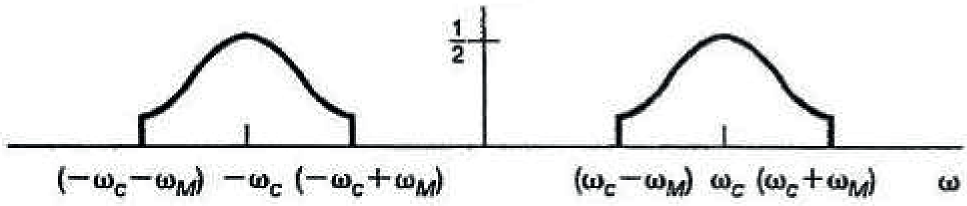


Figura 27: Bandas laterais pelo domínio da frequência.

Bandas laterais sao as responsáveis por conter a informação após o processo da modulação pela portadora. No processo DSB-SC possui duas bandas laterais, uma superior e outra inferior, assim temos que as duas bandas levam a mesma mensagem. Logo basicamente as bandas laterais, são o sinal da mensagem na frequência da onda portadora. Logo veremos a seguir que o processo de demodulação precisará deslocar a mensagem para a sua posição original para recuperar a informação.

Como não há presença de uma componente discreta da frequência da portadora ω_c, isto é, amplitude, frequência ou fase, tem-se modulação DSB-SC (Double Sideband with Supressed Carrier), que é modulação em banda lateral dupla com portadora suprimida.

Podemos perceber que estas bandas não se sobrepõem, levando a mensagem desejada ao aparelho receptor. Os exemplos abaixo ilustram o motivo da frequência da onda portadora, ser maior que a frequência da onda da mensagem, no processo de modulação.

I Seja $\omega_M < \omega_c$, *tal que* $\omega_M = 200\ Hz$ (frequência de uma onda sonora) e $\omega_c = 10^5$ Hz (frequência de uma emissora de rádio AM), pela a equação da onda modulada,

$$y(t) = \frac{1}{2}\,cos(w_c + w_m) + \frac{1}{2}\cos(w_c - w_m)$$

podemos notar que a mensagem nos argumentos dados, possui sinal variando 9.800 a 100.200 na banda lateral superior e –9.800 a –10.200 na banda lateral inferior, não ocorrendo sobreposição das bandas, veja a Figura 28.

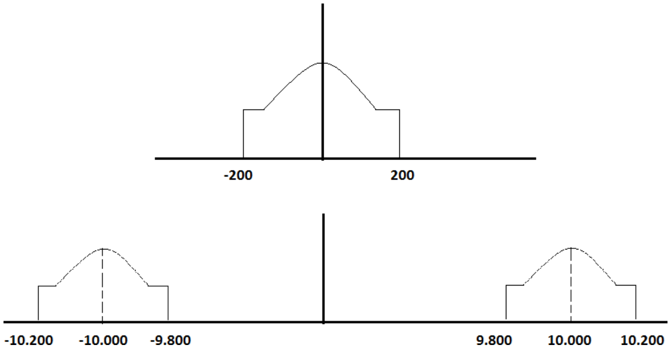


Figura 28: Gráfico de frequência por amplitude, caso $\omega_M < \omega_c$.

II Seja $\omega_M > \omega_c$, tal que $\omega_M = 300$ Hz e $\omega_c = 100$. Logo podemos notar que após o processo de modulaçao nestes argumentos, que a banda lateral superior varia de -200 a 400 e a banda lateral inferior varia de -4000 a 200. Devido a sobreposição das bandas, não será possível realizar o processo de recepção da mensagem, veja a Figura 29.

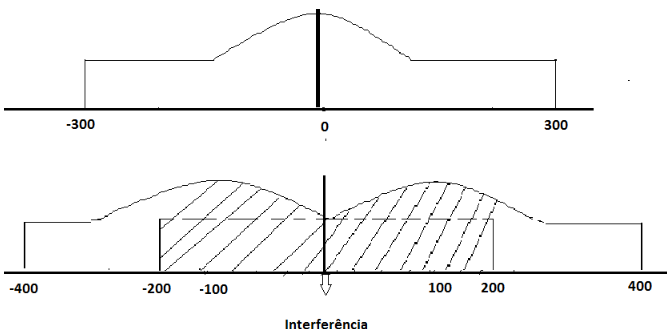


Figura 29: Gráfico de frequência por amplitude, caso $\omega_M > \omega_c$.

Podemos observar que há uma sobreposição, nas ondas das bandas laterais que impossibilitam o processo de demodulação.

4.4 Demodulação

Demodulaçao é o processo para recuperar a mensagem enviada via onda de rádio AM, isto é, o processo que decodifica uma mensagem contida na onda eletromagnética, em específico em suas bandas laterais.

A mensagem desejada a ser recuperada no processo da demodulação está contida nas bandas laterais como vimos anteriormente. Contudo o processo de demodulação DSB-SC suprime uma das bandas, já que a informação é a mesma contida em ambas as bandas laterais, e assim retira a informação presente em apenas

uma das bandas [7].

Demodulação DSB-SC consiste em multiplicar o sinal modulado *y(t)* novamente pelo sinal portador *x(t)*. Assim teremos uma nova função *d(t)* para o sinal demodulado, dada por:

$$d(t) = y(t) \cdot x(t)$$

Veja Figura 30.

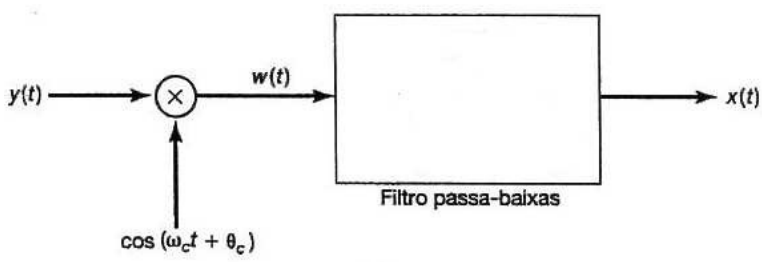


Figura 30: Esquema demodulação AM.

Reescrevendo *y(t)* como produto dos sinais modulado e portador temos:

$$d(t) = [m(t) \cdot x(t)]x(t) = m(t) \cdot [x(t)]^2$$

Na forma trigonométrica a equação é escrita como:

$$d(t) = cos(\omega_M) \cdot [cos(\omega_c)]^2$$

Utilizando a soma de arcos seno sabemos:

$$cos(2a) = cos(a) \cdot cos(a) - sen\ (a) \cdot sen\ (a)$$

$$cos(2a) = cos^2(a) - sen^2(a)$$

Mas pela relação fundamental da trigonometria, sabemos que:

$$-sen^2(\alpha) = cos^2(\alpha) - 1$$

Substituindo na relação acima temos:

$$cos(2a) = cos^2(a) + cos^2(a) - 1$$

$$cos(2a) = 2\ cos^2(a) - 1$$

$$cos(2a) + 1 = 2\ cos^2(a)$$

$$cos^2(a) = \frac{cos(2a) + 1}{2}$$

Assim:

$$d(t) = \cos(w_m) \cdot \frac{1}{2}[1 + \cos(2w_c)]$$

$$d(t) = \frac{1}{2}\cos(w_m) + \frac{1}{2}\cos(w_m) \cdot \cos(2w_c)$$

$$d(t) = \frac{1}{2}\cos(w_m) + \frac{1}{2}\cos(2w_c + w_m) + + \frac{1}{2}\cos(2w_c - w_m)$$

Ao fim deste processo, a mensagem demodulada possui então duas componentes com frequ¨ências significativamente distintas entre si, umas delas correspondendo ao sinal da men- sagem desejada, e outras frequências de alta escala de componentes $2\omega_c + \omega_M$ e $2\omega_c - \omega_M$ que serão suprimidas pelo filtro, devido ao fato que estes sinais não possuem informação e por sua alta frequência não são capazes de levar informação via rádio. Na prática, em sistemas de informaçao, a extração da mensagem pode então ser realizada através de dispositivos como os filtros passa-baixo, selecionando-se apenas o sinal com a frequência da mensagem desejada.

Filtro passa baixa é um circuito eletrônico que permite a passagem de sinais elétricos apenas abaixo de um limite desejado, sua função é suprimir os ruídos elétricos presentes no processo de demodulação que causam uma distorção no sinal da informação. Na demodulação AM o filtro suprimi os sinais das frequências altas geradas pelas componentes $2\omega_c + \omega_M$ e $2\omega_c - \omega_M$ (ruídos elétricos), que são sinais que aparecem apos o processo de demodulação juntamente com o sinal da mensagem, não levando informação alguma [7].

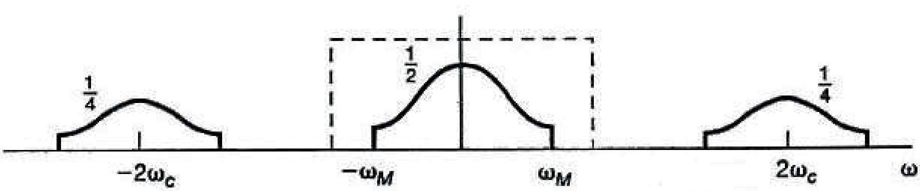


Figura 31: Gráfico no domínio da frequência, onda demodulada.

Logo após a passagem do filtro passa baixa só restará a presença do sinal da mensagem desejada, assim a informação poderá ser transmitida ao aparelho de áudio, através de um auto falante, fone de ouvido dentre outros aparelhos.

APLICAÇÃO DO TEMA DO ENSINO MÉDIO

O método de ensino aprendizagem construtivista visa colocar o aluno no centro do processo de ensino aprendizagem, isto é, construindo o conhecimento do mesmo a medida que ele desperte interesse e comece a questionar o processo da abordagem do conteúdo.

Utilizando o método construtivista, podemos abordar este tema visando que o aluno tenha pelo menos uma curiosidade de como podemos aliar dois conteúdos distintos e de áreas distintas em uma só abordagem no ensino.

Esta metodologia pode ser abordada a alunos do 2º ano do ensino médio e 3º ano do ensino médio.

O tema deve ser apresentado em três aulas (60 minutos), sendo que a distribuição de temas a serem dados em cada aula será exposto de acordo com o planejamento abaixo:

1ª aula : Apresentação do rádio, citação dos conceitos básicos matemáticos.

2ª aula: Citação dos conceitos básicos físicos, explicação do conceito de modulação e demodulação AM.

3ª aula: Questionario a ser aplicado aos estudantes e conclusão do processo.

Os estudantes dos eixos citados acima já possuem conhecimentos tantos dos conceitos ma- temáticos quantos dos conceitos físicos, possibilitando ao professor apenas citar com algumas intervenções a maior parte dos temas.

Já na parte da modulação e demodulação AM, como é um tema novo para o estudante, é importante que o professor aborde o contéudo apresentado que são estes conceitos e qual a importancia destes no processo de transmissão de uma informação via rádio.

A intenção da aplicação desta sequência no ensino médio é, despertar o interesse do aluno tanto no desenvolvimento dos conceitos Matemáticos, quanto aos conceitos Físicos. Através de uma interdisciplinaridade dos conteúdos tornando o aprendizado mais estimulante através da abordagem de uma aplicação prática da Matemática em conceito Físico.

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentada uma visão bem simples da matemática por trás da trans- missão de informação via onda de rádio AM, os conceitos básicos matemáticas e físicos ne- cessários e uma pequena introdução de modulação e demodulação DSB-SC que é o processo de modulação em bandas com a portadora suprimida. Também foi sugerido uma sequência didática afim de aprimorar os conceitos.

Por último, depois de uma aplicação prática da matemática em um contexto de suma im- portância no cotidiano acreditamos tornar o processo de ensino aprendizagem mais prazeroso aos alunos.

COMENTÁRIO E AGRADECIMENTO FINAL

Gostaria primeiramente de agradecer a Deus, por me conceber o dom da vida e me possi- bilitar ser um professor que ama a sua profissão e a disciplina que transmite aos alunos.

Minha esposa Jéssica e meu filho Lucca, que sempre estiveram ao meu lado, com muita paciência e demonstrando muito respeito em todo o processo do curso.

Aos meus pais por sempre me apoiarem em todas as minhas decisões e me incentivando a cada dia no meu progresso nos estudos.

Aos meus amigos da turma do Profmat 2015 da Universidade Federal de São Jõao Del Rey em particular Eduardo Estevam e Fernando Augusto, pela amizade e cumplicidade.

Minha professora orientadora Doutora Gilcélia Regiane de Souza, por me orientar em meus estudos e na elaboração deste trabalho tendo sempre muita paciência e bom humor na orientação.

A CAPES por me apoiar financeiramente em meus estudos, sendo imprescindível no momento devido a grande dedicação e tempo que necessitava este curso em minha vida.

REFERÊNCIAS

[1] G. Iezzi, *Fundamentos de Matemática Elementar - vol 3 - 2ª edição*, Editora Atual , São Paulo, 1977.

[2] J. C. O. Medeiros, *Princípios de Telecomunicações Teoria e Prática*, Editoa E´rica , São Paulo, 2007.

[3] J. R. Bonjorno & R. F. S. A. Bonjorno & V. Bonjorno & C. M. Ramos & L. A. Alves, *Física: Termologia-Óptica-Ondulatória*-1ª *edição*, Editora FTD, São Paulo, 2010.

[4] Gualter J. B. & Andre´ C. M., *Física-Volum Único*-3ª *edição*, Editora Saraiva, São Paulo, 1998.

[5] E. M. Miyoshi & C. A. Sanches, *Projetos de Sistemas Rádio*-4ª *edição*, Editora E´rica, São Paulo, 2008.

[6] B. P. Lathi & Z. Ding, *Sistemas de Comunicações Analógicos e Digitais Modernos*-4ª *edição*, Editora LTC, São Paulo, 2012.

[7] A. V. Oppenheim & A. S. Willsky, *Sinais e Sistemas*-2ª *edição*, Editora Pearson, São Paulo, 2010.

[8] http://www.mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/ondas-eletromagneticas- ionizantes.htm.

[9] https://www.snnangola.wordpress.com/2010/10/26/o-paradoxo-da-velocidade-de-propagacao-das-ondas-eletromagneticas.

[10] C. Graça, *Eletromagnetismo*, Rio Grande do Sul.

[11] http://www.informatica.hsw.uol.com.br/ondas-de-radio1.htm.

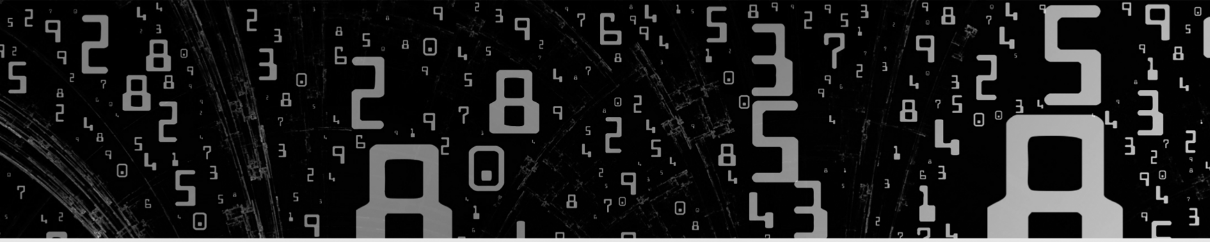
[12] http://www.projetandousf2.blogspot.com.br.htm.

[13] R. L. *2008.* Burden & J. D. Faires, *Análise Numérica*, Cengage Learning, São Paulo,

SOBRE OS AUTORES

FREDERICO FERREIRA DE PINHO TAVARES - Possui graduação no centro universitário de Belo Horizonte (UNI-BH) concluído em 2012. Mestrado em Matemática pura e aplicada na Universidade federal de São João Dele Rey concluído em 2017. É professor das redes pública e privada de ensino de Belo Horizonte a 10 anos.

GILCÉLIA REGIÂNE DE SOUZA - Possui graduação em Bacharelado em Matematica pela Universidade Federal de Minas Gerais (2003), mestrado em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (2005) e doutorado em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (2013). Atualmente é professora adjunta da Universidade Federal de São João Del-Rei. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática Aplicada, atuando principalmente nos seguintes temas: métodos computacionais, aproximação adaptativa e hierarquia.



A Matemática e
as Ondas de Rádio AM



www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora

Ano 2021

A Matemática e as Ondas de Rádio AM

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2021